

UNA PARADOJA DEL CONTINUO*

Antonio Belaunde Moreyra
A mi amada esposa Yvonne

Resumen

Cierta prueba de la no-enumerabilidad de los puntos de un segmento de una línea recta de longitud 1 es verificada de manera crítica mediante el obvio experimento de aplicar la prueba al conjunto enumerable de puntos racionales de dicho segmento. El resultado es paradójico.

Dicho resultado paradójico podría esperarse desde el punto de vista del sentido común, o intuición, si se prefiere. Comencemos.

Mi punto de partida es una cita del libro del Profesor Raymond Wilder, titulado "Introduction to the Foundations of Mathematics" (John Wiley & Sons, N.York, Londres, 1960). Citemos el párrafo correspondiente situado en la página 86, que traduzco al castellano de la manera siguiente:

"Que el conjunto de los puntos de un segmento de una línea recta euclidiana no es contable, se demuestra de la manera siguiente: Sea ab un segmento de la línea recta L ; podemos suponer que la longitud de ab sea la unidad 1. Asumamos ahora que los puntos de ab forman una colección contable (y por lo tanto enumerable) puesto que no son un conjunto finito). De la correspondencia biunívoca que existe entre los puntos (del segmento) y los números naturales, según se sigue de la hipótesis, derivamos los símbolos x_n de tal manera que cada punto de ab puede ser "llamado" x_n , $n=1,2,3,\dots$, no dándose a dos puntos distintos el mismo "nombre". Ahora, para cada n , sea I_n un intervalo de longitud $(1/2)^{n+1}$ ($1/2$ elevado a la potencia $n+1$) con centro en x_n . En principio, los intervalos I_n cubren el segmento ab (es decir, cada punto del intervalo está al menos en algún I_n). En consecuencia, sus longitudes deberían sumar por lo menos 1, desde que ab tiene por longitud la unidad; pero la suma de la serie cuyo término general es $(1/2)^{n+1}$ es solamente $1/2$. Así, la hipótesis que los puntos de ab forman una colección contable lleva a una contradicción".

A.- Apliquemos ahora el mismo razonamiento a los números racionales contenidos en el intervalo ab de longitud 1, los cuales en principio son enumerables, según lo demostró originalmente Cantor y desde entonces es doctrina consagrada en la Teoría de Conjuntos. Así, a cada racional v corresponde un intervalo $I_n=(1/2)^{n+1}$ (I sub n igual a un medio elevado a la potencia $n+1$), donde n es el número natural asignado a dicho racional en la enumeración específica que se ha dado a los puntos racionales (puntos correspondientes a números racionales) del intervalo ab , lo cual es siempre posible. No considero relevante si los puntos finales están incluidos o no.

*Esta ponencia fue leída el 19 de Setiembre de 1995 y discutida el 26 del mismo mes.

Llamaremos "sombrosos" a estos intervalos I_n (I sub n), es decir, "sombrero" cada uno del correspondiente punto racional v_n que está en su centro. Quedamos, pues, en que la suma total de los sombreros es $1/2$ y por lo tanto no abarca la totalidad del intervalo ab , cuya longitud es igual a 1 , sino a lo sumo la mitad de éste. Se sigue que los sombreros dejan "claros" en ese intervalo, siendo cada "claro" una parte del intervalo no "cubierta" por ningún sombrero. Repito: "no cubierta por ningún sombrero". Es evidente que los "claros" sólo pueden constar de puntos irracionales (puntos correspondientes a números irracionales), pues cada racional tiene un sombrero. Como hay puntos irracionales que están cubiertos por algunos sombreros, los llamaremos "irracionales cubiertos", para diferenciarlos de los que están en los "claros", a los que llamaremos simplemente "irracionales claros".

B.- Si c y c' son dos irracionales claros, habrá entre ellos al menos un sombrero, dada la densidad del conjunto de los números racionales dentro de los reales. Esto implica que si c y c' son dos claros irracionales diferentes entre sí, por muy cercanos que ellos estén entre sí, pertenecen a claros distintos, pues si pertenecieran al mismo claro, entonces dada la densidad del conjunto Q de los números racionales dentro del continuo real, ese claro incluiría al menos un sombrero, lo cual es una contradicción. En consecuencia cada claro consta de un solo punto.

Aquí debo advertir que hasta ahora he encontrado cierta dificultad para darme a entender acerca del sentido exacto de esta conclusión, o lema. Los matemáticos con los que he estado en contacto, particularmente en Lima, suelen entenderla en el sentido que todo "claro" es un intervalo muy pequeño que se puede reducir progresivamente tanto como se quiera. Su idea sería que al cortar la continuidad del "claro" por la aparición de un sombrero en él, quedaría un nuevo claro menor, en el cual aparece un nuevo sombrero, y así sucesivamente, de modo que el claro, sin desaparecer nunca, se convierte en un ínfinitesimal, un intervalo no arquimídeo pero continuo, reducible tanto como se quiera.

Pero esta manera de entender los claros es precisamente contraria a lo que tengo en mente. Lo que tengo en mente es que los claros, lejos de ser intervalos ínfinitesimales reducibles a voluntad, son antes bien ab initio meramente un punto, el único punto irracional no cubierto que cabe en cada uno de ellos. En tal sentido, la densidad de los racionales en los reales es el fundamento de mi conclusión, pero ella no figura en su enunciado. Ese enunciado simplemente dice: "Para todo claro C y todo irracional c miembro de C , no existe un irracional c' distinto de c y miembro de C ". En fórmula:

$$(\forall C) (\forall c) (c \in C \rightarrow (\exists c') (c' \in C \ \& \ c' \neq c)).$$

No se trata pues de escoger dos irracionales claros c y c' descartando el segundo para reemplazarlo por un tercer irracional claro c'' y así sucesivamente, reduciendo tanto como se quiera el claro C en torno al irracional c . Por el contrario, lo que se trata es que, una vez fijado el irracional claro c , se niega la existencia en el claro C de cualquier otro irracional claro c' . La estructura de cuantificación de nuestro lema es pues: 2 cuantificadores universales para C y c , respectivamente, y la negación del cuantificador existencial para c' . Así, todo claro es puntual, consiste en un solo punto irracional aislado de los demás y rota su continuidad o conectividad respecto de ellos. En consecuencia, las variables ' C ' y ' c ' pueden considerarse sinónimas, aunque hay una diferencia de grado lógico entre ellas porque ' C ' representa un conjunto y ' c ' representa un punto, pero precisamente ' C ' representa el conjunto singular cuyo único punto miembro es representado por ' c '.

Tal es una primera conclusión paradójica de nuestro razonamiento, pues si el conjunto de los claros, aún suponiéndolo no enumerable, está constituido sólo por puntos aislados (hay quien dice "discretos"), sin continuidad o conectividad entre ellos, ¿cómo puede pretenderse que su extensión total sea no menor de la mitad del intervalo ab ?, es decir $1/2$. Según entiendo, para que los claros abarquen en total esa extensión, es necesario que constituyan intervalos contínuos, por pequeños que ellos sean, pero esa es precisamente la posibilidad que hemos rechazado. De ahí la importancia que la correcta comprensión de nuestro lema tiene para colegir la paradoja que proponemos. De cualquier manera, este no es todavía el punto crucial en nuestro argumento.

C.- Hay en efecto más. Consideremos ahora las propiedades algebraicas del conjunto Q de los números racionales. Los sombreros han sido definidos como ciertos intervalos racionales cuyo centro es un punto racional; en consecuencia los extremos (o límites) de los sombreros serán a su vez puntos racionales y constituyen por lo tanto, cada uno, el centro de un nuevo sombrero y así sucesivamente ad infinitum. Para este efecto no importa si los sombreros son intervalos abiertos o cerrados. Tenemos pues que los sombreros no se dan aislados, uno por uno, sino en conjuntos infinitos de sombreros parcialmente superpuestos. A estos conjuntos de sombreros los llamaremos "puentes", siendo cada puente un intervalo contínuo que cubre una distancia finita dada, por pequeña que ella sea, en el intervalo total ab , que es nuestro universo de lenguaje. Como los puentes no tienen último término, es decir, no tienen último sombrero, ni a la derecha ni a la izquierda, supondremos que son intervalos abiertos que convergen en ciertos puntos irracionales. Pero ¿estamos seguros que estos puntos son "irracionales claros"? Pudiera suceder que algunos puentes desborden el intervalo ab , aunque no tomaremos en cuenta esta posibilidad.

Ahora, como cada sombrero cubre infinitos puntos racionales, se ve claramente que los puentes no están solos, sino que se superponen parcialmente en hazes de puentes (en inglés diría "bundles"). La única posibilidad para que haya irracionales claros es que si c es un punto irracional claro, entonces en c convergen simultáneamente dos hazes de puentes, uno por la derecha y otro por la izquierda. Todo esto es muy extraño y trae a colación el tema de la probabilidad infinitesimal, que podría ser el caso de los claros irracionales -o claros simplemente. Supongamos, sin embargo, que éstos existen y que son infinitamente numerosos; pero la ortodoxia matemática requiere algo más, requiere que los claros irracionales sean no enumerables. Examinemos esta posibilidad más de cerca.

D.- De lo dicho anteriormente, se desprende que para que pueda haber claros irracionales, es necesario que dos conjuntos de "puentes" que se superponen, o "hazes" de ellos como hemos dicho, converjan sobre cada claro dado, uno por la izquierda y otro por la derecha. Llamaremos "carreteras" a estos hazes de puentes que se superponen, cada uno de los cuales entre los dos puntos claros que son, para cada carretera, sus puntos límites a la derecha y a la izquierda. Claramente, no hay superposición entre "carreteras", pues sus puntos claros límites la separan, o "cortan" a la manera de Dedekind ("they set them apart", se diría en inglés), de modo que ellas determinan una partición disjunta del conjunto de puentes, y en consecuencia, de los sombreros, y finalmente, de los puntos racionales mismos. Como éstos son enumerables, se sigue que las "carreteras", suponiendo que sean plurales, son a lo sumo enumerables, puesto que en una partición disjunta el número de las partes no puede ser mayor que el número de los elementos miembros del conjunto partido. Por supuesto, los claros que constituyen sus límites son también a lo sumo enumerables. La paradoja está probada. (Para cualquier duda, ver el *Post-Scriptum* páginas adelante.)

Ahora, añadamos a cada "carretera" el claro que supuestamente la limita a su izquierda, lo que no modificaría de ninguna manera la extensión arquimédea de la "carretera". Esto puede hacerse a lo largo del intervalo ab ya que a todo lo largo de éste hay puntos racionales (puntos que corresponden a números racionales). Así, tenemos que todo el intervalo ab está cubierto por "carreteras cerradas a la izquierda", es decir, en última instancia, por sombreros. Así, se demuestra que los sombreros cubren no sólo (a lo sumo) la mitad del intervalo ab, sino lo cubren todo entero. La contradicción está de esta manera plásticamente demostrada.

E.- En una visita reciente a Nueva York durante la cual tuve contacto con varios profesores, se me objetó que los claros como límites entre "carreteras" que convergen en ellos de cada lado no son todos los claros posibles. Dichos profesores consideran que debe tomarse en cuenta la posibilidad que las "carreteras" mismas vengan en familias infinitas o conjuntos abiertos, convergiendo en una segunda clase de claros. Puede decirse que ellos postulan la posibilidad de "carreteras" de segundo grado que son intervalos abiertos que convergen a su vez en "claros de segundo grado", de modo que los "claros de primer grado" que hemos tomado en consideración hasta ahora no agotan la posibilidad de claros. Eso invalidaría mi argumento, como ellos lo pretenden, siempre que los claros de segundo grado resultan ser no enumerables.

Por supuesto, ésta es sólo una posibilidad que no está probada. La única manera de probarla sería construir por lo menos uno de los supuestos "claros de segundo grado", dada una cierta enumeración del conjunto de racionales del intervalo ab. Yo desafío a cualquiera a hacerlo, tomando en cuenta que ninguna enumeración puede completarse y se requiere esto para asegurar que los claros existen. En otras palabras, para probar que un claro existe, debe construirse de manera tal que ningún sombrero lo cubra, pero no es posible agotar el conjunto infinito de los sombreros. Aún cuando no adoptemos este requisito constructivista, los presuntos objetantes tendrían todavía que probar que los "claros de segundo grado", suponiendo que existan, son no enumerables, lo que no está asegurado de antemano.

Ahora bien, mi respuesta es que las "carreteras" de segundo grado (si existen) constituirían una partición disjunta del conjunto de "carreteras" de primer grado (sin superposición entre ellas), y en consecuencia, partición disjunta del conjunto de los sombreros. Ya que tanto las "carreteras" de primer grado como los sombreros son enumerables, entonces las "carreteras" de segundo grado no pueden ser más numerosas, de modo que no pueden ser no-enumerables, y lo mismo pasaría con los claros de segundo grado sobre los cuales supuestamente convergen. Mi argumento contra las "carreteras" de segundo grado y los claros de segundo grado es así formal y esencialmente el mismo que el usado antes contra las "carreteras" y los claros de primer grado; y lo mismo pasaría con "carreteras" y claros de cualquier supuesto grado mayor, dejando nuestra paradoja claramente en evidencia.

F.- Aparte de nuestra respuesta en el precedente punto E.- de este trabajo, es claro para mí que la conclusión plástica del punto D.- concerniente a la cobertura de todo el intervalo ab por "carreteras cerradas a la izquierda", es decir después de todo, por sombreros, es suficiente para probar de manera concluyente la paradoja, ya que si hay una pluralidad no-enumerable de irracionales claros, entonces: dónde están? Solamente hay límites entre "carreteras" y conjuntos de "carreteras", si existen, y no añaden nada desde el punto de vista arquimédeo a dichas "carreteras" y conjuntos de "carreteras" - las cuales, a propósito, muy probablemente son sólo una "carretera" que cubre (potencialmente, no realmente) todo el intervalo ab y que desborda desde ésta por ambos lados, no habiendo claros irracionales en absoluto. No pretendo probar este alcance extremo de mi argumento. Solamente se sugiere -por lo que realmente he probado, es decir, si existen irracionales claros éstos no pueden ser no-enumerables- que para los fines de

su valor arquimídeo, el conjunto de los sombreros cubre (potencialmente) todo el intervalo ab . Por "cubre potencialmente" quiero decir que no hay parte del intervalo ab de la cual los sombreros, y puentes, y "carreteras", estén excluidos, aunque en realidad no pueden sumar más de $1/2$. ¡Mysterium confusionis!

Dejemos para otra ocasión los comentarios que creo deben venir sobre esta contradicción. Lo primero es probarla. Luego vendrá la tarea de resolverla.

Sin embargo, parece claro que la contradicción concierne al lazo entre la Aritmética y la Geometría, y más específicamente la relación uno a uno (biunívoca o biyectiva) entre el conjunto continuo de los puntos de algún segmento de una línea recta y el conjunto de los números reales. Dicha biyección es sólo potencial, no actual, es decir, no puede cumplirse completamente, ya que el conjunto de los números racionales constituye una *net* que solamente puede densificarse progresivamente, siendo el continuo el límite inalcanzable ("Unereichbar") de dicha densificación. Este es un hecho obvio del cual los matemáticos todavía no han sacado a la luz todas las consecuencias, lo que, según entiendo, sólo puede hacerse mediante una exhaustiva revisión de la teoría de los cortes de Dedekind. He tratado este tema por más de 20 años, pero hasta ahora no he tenido suerte con los matemáticos a quienes he mostrado mi trabajo. Espero que mi paradoja finalmente atraiga su atención hacia él.

Puedo adelantar ahora mi conclusión: *existe un eslabón perdido entre la teoría de Cantor y la de Dedekind, cada una de las cuales es correcta en sí misma, pero el lazo entre ellas, como usualmente se enseña en las Matemáticas convencionales, es incorrecto, lo que queda demostrado de manera decisiva por mi paradoja. Esta puede llamarse la "revancha de Kronecker", y el resultado final será, contrariamente a todas las expectativas, probar lo que se llama la "hipótesis especial del continuo", lo que a su vez será la reivindicación final de Cantor.* Pero mi trabajo sobre los cortes de Dedekind debe ser estudiado para entender esto.

Nueva York, 19 de marzo de 1995
(Feria de San José)

Post-Scriptum: He tropezado con algún matemático cabezota que se rebela contra mi aserto o supuesto que en una partición disjunta el número de las partes no puede ser mayor que el número de elementos del conjunto partido. El supuesto es fácil de probar puesto que siempre será posible establecer una "función" o relación inyectiva entre el conjunto partido, digamos el conjunto Q' de los números racionales del intervalo ab , y el conjunto de las partes disjuntas en que lo hemos partido, digamos el de las "carreteras" previamente definidas: a cada v miembro de Q' corresponde una y sólo una carretera q de la cual es miembro. La relación inyectiva propuesta viene así a ser la propia relación de membrecía.

El matemático en cuestión se negaba a aceptar esta prueba en vista de un razonamiento por analogía: los cortes de Dedekind para números irracionales, que se supone son no enumerables, dividen al conjunto Q de números racionales (ordenado según magnitud) en partes disjuntas; ¿son ellas enumerables?, o no enumerables? Este es un problema que he tratado de resolver en mis antedichos estudios. Por cierto, la no enumerabilidad del continuo fue fehacientemente probada por Cantor mediante un razonamiento que implica una partición no disjunta del conjunto de los subconjuntos del infinito enumerable de los números naturales. Insisto, Cantor usa en su razonamiento una partición no disjunta; pero obtenido el resultado de la no enumerabilidad que lleva al concepto kantiano de potencia, este resultado viene a quedar insertado, en buenas cuentas contra natura, en el esquema de las cortaduras de Dedekind, no obstante ser evidente que nunca se habría podido llegar al concepto kantiano de potencia

transfinita a través del modo de razonar que Dedekind utilizó. De esta manera se plantea en consecuencia una segunda paradoja: ¿son los números irracionales realmente no enumerables?. Pero ¿qué tiene de extraño que un resultado paradójal conduzca a otro que no lo es menos?

Esta es la razón por la que yo pretendo que la solución integral del problema que plantea el presente papel exige una reevaluación radical de la teoría de los cortes de Dedekind, y ello en vista de la densificación progresiva del conjunto de los números racionales. Estoy convencido que tal reevaluación conducirá infaliblemente a demostrar la hipótesis especial del continuo. Sin asumir esa hipótesis como uno de sus supuestos básicos, la teoría de los conjuntos resulta ser contradictoria. ¿Es mi paradoja una prueba suficiente de la hipótesis del continuo? Así lo creemos y deseamos, o esperamos, pero si esta confianza nos fuera suficiente, nos parece claro que otras vías están, mejor dicho, quedan desde ahora anchamente abiertas hacia tal perspectiva.

Lima, 6 de junio de 1995
(Infraoctava de Pentecostés)



SOCIEDAD PERUANA DE FILOSOFÍA