SOBRE EL CONCEPTO DE RELEVANCIA LOGICA

Francisco Miró Quesada C.

1. EL SURGIMIENTO DE LA LOGICA MODERNA Y EL ABISMO DE LA DEDUCCION

La lógica moderna surge cuando se descubre que pueden utilizarse métodos algebraicos para sistematizar los procesos deductivos. Leibniz es el primero en darse cuenta de esta posibilidad, pero son Boole y De Morgan los primeros en desarrollarla sistemáticamente. La teoría aristotélica del silogismo completada por los aportes de Apuleyo, Boecio y los grandes lógicos medioevales tenía una limitación; carecía de un instrumento lingüístico adecuado para expresar relaciones complicadas. Cuando se descubre que es posible representar las relaciones entre conceptos mediante operaciones algebraicas de suma, multiplicación y negación, se amplía al infinito la posibilidad de expresar relaciones conceptuales complicadas. La lógica comienza, así, a incorporar a la teoría de la deducción una serie de principios y de reglas que permiten analizar las deducciones efectuadas en las diversas ciencias, especialmente matemáticas que, en general, son bastante más complicadas que las que se efectúan en el lenguaje conversacional. A partir de este momento se constituye en una teoría sistemática de amplio contenido. Además, se toma conciencia de que los métodos operativos de carácter algebraico pueden aplicarse a objetos no numéricos, lo que amplía también, de manera extraordinaria, el campo de aplicación de la matemática.

Sin embargo esta ampliación no fue suficiente. A pesar del enorme enriquecimiento de la teoría deductiva obtenido mediante la aplicación de métodos algebraicos, los aspectos más importantes y profundos de la deducción matemática escapaban al poder de análisis de la nueva lógica. Solo ahora se comprende que ello se debía a que el sistema algebraico booleano (así llamado en honor de uno de sus primeros aplicadores) no era suficientemente poderoso para representar toda la lógica utilizada en el razonamiento científico. Para haber hecho una sistematización completa de las estructuras deductivas utilizadas en la matemática se debería de haber utilizado un sistema algebraico capaz de representar la cuantificación de las proposiciones (universalidad y particularidad). Esta álgebra existe hoy día, es el álgebra cilíndrica elaborada especialmente por Tarski y Henkin. Pero en la época no existía y fue por ello, necesario, para superar la limitación del enfoque booleano, orientar la investigación en otra dirección. Fue Frege el primero en poder avanzar por este camino. Logró expresar la cantidad de las proposiciones mediante un simbolismo especial y gracias a ello hizo posible dos cosas: 1) pudo expresar los tipos más complicados de proposiciones utilizados en la deducción matemática, 2) pudo desarrollar la lógica axiomáticamente, porque el nuevo lenguaje utilizado revelaba las estructuras proposicionales en forma directa de manera que permitía ver con facilidad las relaciones deductivas entre las propias proposiciones lógicas.

A partir de Frege, la lógica formal comienza a desarrollarse rápidamente. Con genio increíble Frege elabora un sistema de axiomas lógicos que resulta completo y consistente, es decir, permite derivar deductivamente todas las fórmulas lógicas que se necesitan para analizar y fundamentar la deducción matemática y está, además, libre de contradicciones. Hacia 1920 se considera que la lógica es un sistema matemático perfecto que ha alcanzado un desarrollo definitivo. Es posible, partiendo de unos axiomas muy simples, obtener todas las fórmulas que se necesitan para analizar y fundamentar la deducción científica, y esto se hace de manera estrictamente formal, es decir, simbólica, sin que intervenga para nada la significación de los símbolos utilizados. Por la época comienzan a desarrollarse una serie de métodos equivalentes, como el método de las tablas de verdad y algunos años más tarde se elaboran los métodos de la deducción natural y de los secuentes. En 1952 se crea el método de las tablas semánticas, también equivalente.

Hay, sin embargo, un aspecto de los nuevos sistemas que presenta algunas oscuridades. Y es el de la justificación de las fórmulas utilizadas. Cuando se parte de axiomas, se supone que dichas fórmulas son lógicamente válidas, es decir, que tienen una verdad necesaria. Y es esta validez la que permite aplicarlas, luego, a la efectuación de deducciones matemáticas o de cualquier otra índole. Por esa época, el concepto mismo de validez no se veía con claridad como lo muestran las consideraciones de Bertrand Russell al respecto en sus Principios de las Matemáticas y en su Introducción a la Filosofía matemática[1].

A fines del siglo pasado, justo en el momento en que Frege había terminado su admirable sistematización, surgen las famosas paradojas de la teoría de los conjuntos y estas paradojas tienen que ser resueltas, porque de acuerdo a la lógica, tal como la han sistematizado primero Frege y luego Peano, Whitehead y Russell, si en una teoría se deducen dos proposiciones contradictorias la teoría se trivializa, es decir, se pueden deducir dentro de ella todas sus fórmulas correctas. Esto muestra que la matemática no puede edificarse de manera segura mientras no se disponga de ciertos criterios lógicos como la consistencia. Pero el hecho de que en una teoría matemática no puedan deducirse una proposición y su negación, remite a los conceptos de verdad y de falsedad y estos no pueden aclararse sin utilizar el concepto de significación.

Por otra parte, entre las derivaciones usuales de la nueva lógica formal existían algunos teoremas desconcertantes. Por ejemplo, de una proposición falsa se podía deducir cualquier proposición, y una proposición verdadera podía deducirse de cualquier proposición. Este hecho insólito no coincide con ninguna de nuestras intuiciones lógicas básicas. No hay en efecto, ninguna razón, salvo el hecho de que la fórmula que expresa estas relaciones deductivas puede deducirse de los axiomas y de las reglas derivativas adoptadas, para pensar que, porque una proposición es falsa, puede servir de premisa para deducir cualquier proposición. Lo mismo puede decirse en el caso de la trivialización. Es cierto que nuestra intuición lógica se resiste a aceptar que en una teoría se puedan deducir dos proposiciones contradictorias, por la sencilla razón de que ambas no pueden ser verdaderas. Pero que de ellas se pueda deducir cualquier proposición, lo que produce la trivialización de la teoría, no se basa en ninguna evidencia. No se ve qué relación puede haber entre dos proposiciones contradictorias y cualquier proposición. Sin embargo, esta posibilidad deductiva se demuestra en todos los sistemas de lógica clásica[2].

El desajuste señalado entre los resultados deductivo-formales y nuestras intuiciones lógicas básicas, hizo ver que el simbolismo utilizado para expresar la conexión deductiva entre premisa y conclusión era inadecuado. Este simbolismo es el de la llamada *implicación material*. Desde el punto de vista práctico sirve para expresar las relaciones deductivas y para analizar y justificar los pasos deductivos. Pero cuando se maneja formalmente conduce a los resultados anotados, llamados *paradojas de la implicación material*. Estas paradojas muestran a las claras que la conexión implicativa no es propiamente una conexión deductiva. Así aunque es cierto que si T es un teorema que se ha deducido de un conjunto A de axiomas, mediante los procedimientos de la lógica clásica, entonces:

(1) $\vdash A \supset T$ (A implica T)

no es cierto que " $\supset$ " represente una verdadera relación deductiva. Si así fuera no podría haber conducido a resultados ajenos a nuestras intuiciones lógicas fundamentales.

Para superar esta situación Lewis en 1918 tuvo la idea de crear un nuevo tipo de lógica en la que, en lugar de utilizar el concepto de implicación material para explicar la relación deductiva, utiliza un nuevo símbolo " $\prec$ " que llama de *implicación estricta*. $A \prec B$ significa que de la verdad de los axiomas A, se deriva, en forma necesaria, la verdad de B. Lewis introduce en forma explícita el concepto de *necesidad* que es una de las notas que, intuitivamente, pertenecen al concepto de deducción lógica. A partir de él comienza a desarrollarse la moderna lógica modal, desarrollo que ha tenido una serie de consecuencias de la mayor importancia lógica, matemática y filosófica.

Sin embargo, a pesar de que el sistema de Lewis permite expresar de manera mucho más ceñida que los clásicos el concepto de deducción lógica, se reproducen en él las paradojas de la implicación material. Y ahora se trata de una situación más grave porque interviene el concepto de necesidad. En el sistema de Lewis[3] se demuestra, en efecto, en forma rigurosa, que si una proposición es necesariamente falsa, de ella se puede deducir cualquier proposición, y que una proposición necesariamente verdadera es deducible de cualquier proposición.

Estos resultados hicieron pensar que el concepto de deducción era algo mucho más profundo y mucho más difícil de analizar de lo que se había creído en un principio. Cuando la lógica formal se constituyó en un sistema matemático riguroso dentro del cual era posible derivar, mediante reglas fijas, todas las fórmulas requeridas para analizar y justificar la deducción matemática, todo con independencia del significado de los símbolos, se creyó que se había llegado a la perfección de la teoría deductiva. Se creyó también, sin mayor análisis, con ingenuidad solo explicable por el deslumbramiento del éxito en el funcionamiento del sistema simbólico, que los desarrollos formales reproducían fielmente las relaciones de deducibilidad que se establecen cuando se efectúan deducciones. Sin embargo la existencia de las paradojas mostraba que no era así, que no podía seguirse creyendo que la lógica clásica, en tanto sistema formal, significaba un análisis completo y final del concepto de *deducción.* Comienza, así, a comprenderse, ante el azoro de lógicos y filósofos, que un concepto que había dado la impresión de la más diáfana trasparencia, resultaba uno de los más reacios al análisis.

2. LA DEFINICION SEMANTICA DEL CONCEPTO DE CONSECUENCIA Y SUS LIMITACIONES

En 1935 Tarski presenta, en el Congreso Internacional de Filosofía de París, su famosa definición de *consecuencia lógica,* es decir, de la relación deductiva entre premisas y consecuencia. La definición tiene el mérito de coincidir plenamente con nuestras intuiciones lógicas y de ser una rigorización de las definiciones propuestas por los grandes lógicos medioevales como Abelardo, Dun Scott y Ockham. En términos apretados y sin mayores tecnicismos se dice que una fórmula C de un lenguaje formal L es una consecuencia lógica de las premisas $A_1, \ldots A_n$, que son fórmulas de L, si todo modelo de estas premisas es modelo de C[4].

Debido a su carácter intuitivo y a su coincidencia con la gran tradición de la lógica occidental, la definición de Tarski convence, durante un tiempo, de que es un análisis adecuado del concepto de deducción, a pesar de que él mismo tiene conciencia de que es incompleta. Pero, con independencia de su incompleción, resulta que su definición permite considerar como deducciones válidas aquellas mismas que conducen a las paradojas de la implicación material. En efecto, como $A \wedge \sim A$ no tienen ningún modelo, es imposible que una estructura sea modelo de $A \wedge \sim A$ y no sea modelo de B, Resulta, así que:

(2) $A \wedge \sim A \models B$

Además, como una fórmula válida es satisfecha por cualquier estructura, resulta que cualquier fórmula válida puede deducirse de cualquier fórmula, puesto que toda estructura es modelo de una fórmula válida; y esto tampoco coincide con nuestras intuiciones lógicas fundamentales.

Para superar las limitaciones de la definición de Tarski, varios lógicos como von Wright, Geach y Smiley intentan definiciones de reajuste. Pero todas ellas son variaciones sobre el mismo tema. En esencia se reducen a lo siguiente: se elimina de la definición la posibilidad de que la relación de premisa a conclusión pueda establecerse entre fórmulas válidas o contradictorias. De esta manera no puede darse (2). Pero en cambio se mantienen posibilidades deductivas muy alejadas de nuestra intuición lógica, como:

(3) $A \vdash B \supset A$

(4) $A \vdash \sim A \supset B$, etc.

y algo tan o más grave: no tiene sentido hablar de relaciones deductivas entre fórmulas válidas, lo que reduce a algo sin sentido a la lógica clásica axiomática. En la lógica clásica, partiendo de axiomas que son fórmulas válidas se deducen nuevas fórmulas válidas. Si la definición de consecuencia lógica no incluye estos casos, entonces no se sabe qué cosa se está haciendo cuando se pasa de los axiomas a los teoremas. Se trata de una derivación formal, por cierto, pero que no es deductiva. No se sabe, entonces lo que es.

Se llegó, así, a una situación desconcertante. La lógica clásica, e incluso la lógica de la implicación estricta, que parecían haber analizado el concepto de deducción en forma tan rigurosa y brillante, no reproducían realmente el sistema de las posibles relaciones deductivas. Era necesario buscar un sistema que permitiese hacer este análisis en forma más sistemática y profunda, un sistema que reprodujera las estructuras deductivas tal como son en sí mismas.

Naturalmente que la lógica clásica y la de la implicación estricta se relacionan con el concepto de deducción. Una enorme cantidad de fórmulas que expresan estas relaciones reflejan fielmente la naturaleza de las estructuras deductivas. Pero no todas. Hay un desajuste entre el sistema formal y las relaciones deductivas reales, un desenfoque entre el símbolo y la intuición. Para que la lógica llegue a su perfección debe encontrarse un nuevo sistema que permita reproducir en su totalidad las relaciones deductivas reales, es decir aquellas que coincidan con nuestras intuiciones lógicas evidentes.

3. LAS LOGICAS RELEVANTES

En 1950 en un trabajo memorable, Ackermann presentó un sistema axiomático en el que trataba de resolver este problema: que no pudieran reproducirse las paradojas de la implicación ni material ni estricta, ni la posibilidad de deducir cualquier proposición partiendo de premisas contradictorias[5]. No cabe duda de que el sistema de Ackermann logra eliminar estas dificultades y que sus axiomas son altamente intuitivos. A partir de este trabajo comienzan a proliferar sistemas de lógica que intentan reproducir, de la manera más rigurosa, natural y completa, las estructuras deductivas que tienen un fundamento auténticamente racional y que están de acuerdo con nuestras intuiciones lógicas básicas. Estos sistemas han sido llamados *lógicas relevantes.*

La idea de la *relevancia* es que la deducción lógica es un hecho altamente racional, probablemente, la expresión más directa, más universal y más intuitiva del funcionamiento de la razón humana. La razón humana no se reduce, desde luego, a la deducción, es muchísimo más que eso. Pero la relación de consecuencia lógica entre premisas y conclusiones es un presupuesto racional sin el cual no puede constituirse ningún pensamiento sistemático, y esto significa que sin él tampoco puede constituirse ningún tipo de conocimiento objetivo. Ahora bien, si la deducción lógica es algo racional debe haber siempre *alguna razón* para que la conclusión pueda derivarse de las premisas. Esta derivación *no puede ser arbitraria,* las premisas deben tener *algo que ver* con la conclusión, deben ser *relevantes* para ella. Toda la historia de la lógica está penetrada de esta idea. Tanto Aristóteles como los medioevales y los filósofos racionalistas supusieron siempre que la deducción es un proceso racional y que hay una relación muy determinada entre premisas y conclusiones. Por eso, desde el punto de vista racional, no puede aceptarse que la conclusión *no tenga nada que ver* con las premisas.

Partiendo de esta convicción se comienzan a construir sistemas de lógica dentro de los cuales no puedan reproducirse las paradojas de la implicación material ni las de la implicación estricta y que, por eso mismo, reproduzcan de manera directa las estructuras racionales que permiten fundamentar la deducción. Sin embargo, hasta donde llega nuestra información, los sistemas relevantes, aunque son un progreso en relación con los clásicos, no logran aclarar suficientemente el concepto de consecuencia lógica y de entrañamiento[6]. Los sistemas que conocemos[7] se fundan en ciertas evidencias lógicas básicas, pero sin analizar mayormente el verdadero fundamento de los conceptos utilizados. Hay por eso, en los axiomas y reglas de inferencias presentadas, algunas arbitrariedades y no se encuentra en ellos plenamente la racionalidad buscada. Creemos que las lógicas relevantes son un buen comienzo pero que constituyen apenas una vislumbre incipiente de lo que puede ser un sistema de lógica que pueda ser llamado racional.

4. CRITICA DEL CONCEPTO DE RELEVANCIA - CONDICIONES NECESARIAS Y CONDICIONES SUFICIENTES DE LOGICIDAD

La insuficiencia del concepto de relevancia para aclarar el concepto de *consecuencia lógica* se debe a que es un concepto demasiado general. La relevancia solo nos dice que para que una proposición pueda ser consecuencia lógica de otras, debe haber cierta relación entre ellas. Pero no nos dice qué clase de relación es la que debe establecerse. Y ello se debe a que *la relevancia no es sino una condición necesaria para que puedan efectuarse deducciones, pero no una condición suficiente.* Es la falta de esclarecimiento de lo que son estas condiciones lo que impide ver claro en el concepto de consecuencia lógica y elaborar un sistema que corresponda realmente a nuestras intuiciones racionales. Debemos, pues, analizar estos conceptos.

Sea una deducción cualquiera, intuitiva o formalizada, que representamos de la manera usual:

(5) $A_1, \ldots A_n \models B$

Para que B pueda ser consecuencia lógica de $A_1, \ldots A_n$ deben cumplirse necesariamente ciertas condiciones. Estas condiciones no bastan para que las premisas entrañen la conclusión, pero si no se presentan, no puede producirse el entrañamiento. Las condiciones necesarias de la consecuencia lógica o del entrañamiento, que en adelante llamamos *condiciones necesarias de logicidad* son, pues, propiedades que deben presentarse cada vez que hay una deducción, pero que no bastan para establecerla. Hasta el momento hemos ubicado siete condiciones necesarias de logicidad, pero desde luego, pueden existir otras. Estas son: relevancia, alethicidad, apodicticidad, reflexividad, no simetría, transitividad, no conectividad.

La relevancia significa que tiene que haber una determinada relación entre las premisas y la conclusión. La alethicidad quiere decir que la relación de entrañamiento es una relación entre verdades proposicionales en el sentido de que si las premisas son verdaderas, la conclusión es verdadera[8]. La apodicticidad es que la relación entre la verdad de las premisas y la de la conclusión es necesaria. El concepto de necesidad lógica, como lo demuestra los problemas que se encuentran en su análisis semántico, presenta serias dificultades teóricas. Pero, desde el punto de vista intuitivo es innegable que es una condición que no puede faltar como nota del concepto de consecuencia lógica (entrañamiento). Hay una impresión sumamente fuerte de que si las premisas son verdaderas, la conclusión tiene que ser verdadera de manera ineludible. ¿Cómo y por qué? No se sabe pero *se siente* que es así. Si la conclusión no se deriva necesariamente de las premisas, entonces no es una consecuencia lógica de ellas. Puede ser una consecuencia probable y esto cambia por completo el sentido de la inferencia.

En cuanto a las condiciones restantes forman un grupo especial que caracteriza las condiciones necesarias de la operatividad lógica. Pueden considerarse, por eso, como condiciones necesarias algebraicamente expresables. Conjuntamente expresadas significan que la relación de consecuencia lógica tiene estructura de lattice o rejilla[9]. Aunque estas consideraciones suenan a tecnicismo, se trata sin embargo de propiedades eminentemente clásicas y de una evidencia incontrastable. En efecto, es evidente que si A es una proposición:

(6) $A \models A$ (principio de identidad)

que si A y B son proposiciones y que:

(7) $A \models B$

no es necesario que

(8) $B \models A$

aunque puede ser posible. En caso de que se cumplan (7) y (8), entonces $A \equiv B$, es decir desde el punto de vista lógico pueden considerarse como iguales. Esto quiere decir que de ellas se pueden deducir, dentro del sistema lógico empleado, exactamente las mismas consecuencias.

Si tenemos las proposiciones A, B, C, y

(9) $A \models B$ y $B \models C$, entonces $A \models C$

Esta propiedad es de suma importancia pues hace posible la derivación de infinitos teoremas a partir de un número finito de premisas. En una palabra, es el fundamento inmediato de las ciencias deductivas. Por último, si tenemos dos proposiciones A y B dentro de un sistema en el cual tenga sentido tratar de saber si la primera puede deducirse de la segunda o viceversa, puede darse el caso de que no exista ninguna de las dos alternativas. O sea, la relación de entrañamiento, en relación a un conjunto cualquiera de proposiciones, no tiene por qué existir para cada par de proposiciones del conjunto (no conectividad).

Supongamos ahora que tenemos las siguientes deducciones:

(10) $A \wedge B \vdash B$

(11) $A \vee B \vdash B \vee A$

(12) $\forall x \forall y F x y \vdash F a b$

Es evidente que bastan las premisas para que las conclusiones sean deducibles de ellas. O sea, las premisas tienen ciertas cualidades que son *suficientes* para deducir de ellas las correspondientes conclusiones. Las premisas consideradas cumplen, por eso, *condiciones suficientes de logicidad.* Una condición suficiente de logicidad es una propiedad de un conjunto determinado de proposiciones (que puede ser unitario) que basta para que de ellas se puedan deducir determinadas conclusiones. La lógica debe ser un sistema que explicite las condiciones suficientes de logicidad, ya sea de manera directa como axiomas y reglas, ya sea de manera indirecta, deduciendo nuevas condiciones de las anteriores. No hay ningún círculo vicioso en este planteamiento, puesto que la deducción puede hacerse utilizando las condiciones aceptadas en el punto de partida. Lo extraordinario de la lógica es que las condiciones suficientes de logicidad que deben establecerse en el punto de partida son muy simples y muy poco numerosas. Todas las demás condiciones pueden analizarse por medio de ellas. Pero la relación entre las condiciones derivadas y las iniciales, aunque es uno de los problemas centrales de la lógica, queda fuera del presente tema. Debemos limitarnos únicamente a las condiciones iniciales.

Antes de abordar el análisis de estas condiciones debemos hacer referencia a un hecho que explica por qué en la lógica clásica se produjeron las paradojas de la implicación material y estricta. La razón es que la implicación material tiene propiedades que coinciden con algunas condiciones necesarias de logicidad como la alethicidad y las propiedades algebraicas. Esto quiere decir que es transitiva. Lo mismo puede decirse de la implicación estricta. Ahora bien, los sistemas formales clásicos y modales, contienen una buena proporción, entre sus axiomas y sus reglas, de condiciones suficientes de logicidad. Estas condiciones permiten efectuar deducciones formales correctas. Y como las deducciones tienen la propiedad de alethicidad, esta propiedad puede ser expresada formalmente por la implicación material (o por la estricta)[10]. Resulta, así, que las relaciones de consecuecia lógica pueden expresarse formalmente, de manera genérica, por medio de la implicación material. Y como ésta es transitiva, la transitividad de la consecuencia lógica también queda expresada por dicho tipo de implicación, de manera que la estructura deductiva se refleja, a través de dos de sus condiciones necesarias (alethicidad y transitividad), y da la impresión de que refleja realmente las relaciones de consecuencia lógica. Pero una vez que se utiliza la implicación material para expresar el entrañamiento, las paradojas son inevitables, puesto que, por tratarse de una relación que sólo expresa condiciones necesarias de logicidad, permite efectuar conexiones proposicionales de gran amplitud, conexiones que no son de entrañamiento, pero que cumplen las condiciones necesarias. Lo mismo sucede, en forma más aparatosa todavía, con la implicación estricta, porque ésta, además de cumplir las condiciones necesarias de logicidad que cumple la implicación material, cumple la apodicticidad y produce, por eso, una impresión más fuerte de que representa, efectivamente, la relación de entrañamiento[11].

5. REFLEXIONES PRELIMINARES SOBRE LAS CONDICIONES SUFICIENTES DE LOGICIDAD

Debido a que no existe aún una teoría sistemática sobre las condiciones suficientes de logicidad, en lo que sigue nos limitaremos a algunas reflexiones preliminares. Un desarrollo sistemático sólo podrá hacerse después de haber aclarado ciertos conceptos básicos cuyo análisis tratamos de iniciar a continuación.

Lo primero que debe hacerse para comenzar a analizar el concepto de condición suficiente de logicidad es distinguir entre el nivel coligativo y el nivel cuantificacional. Se trata, en efecto de dos tipos diferentes de consecuencia lógica. En la deducción coligativa intervienen, como integrantes de la deducción, proposiciones no analizadas, mientras que en la deducción cuantificacional toda proposición que interviene en la deducción está analizada. Esto muestra que las intuiciones lógicas que permiten efectuar las deducciones son diferentes. Las intuiciones bases, en el caso de la inferencia coligativa son del significado de partículas sincategoremáticas, mientras que en el caso de la inferencia cuantificacional se trata del significado de partículas proposicionales.

6. CONDICIONES SUFICIENTES DE LOGICIDAD EN EL NIVEL COLIGATIVO

Debe tenerse en cuenta en todo lo que sigue que la implicación no puede incluirse puesto que lo que se busca es el análisis de la relación de consecuencia lógica. Para expresar esta relación utilizaremos el símbolo usual del entrañamiento: " $\models$ ". Creemos que las siguientes constituyen condiciones suficientes de logicidad en el nivel coligativo:

(13') $A . B \models A \wedge B$

(13'') $A \wedge B \models A$, $A \wedge B \models B$

(14) $\sim(\sim A) \models A$, y viceversa

(15) $A . \wedge . (B \vee C) \models A \wedge B . \vee . A \wedge C$ y viceversa

(16) $A . \vee . B \wedge C \models A \vee B . \wedge . A \vee C$ y viceversa

(17) $A \wedge B \models B \wedge A$

(18) $A \vee B \models B \vee A$

(19) $A . \wedge . B \wedge C \models A \wedge B . \wedge . C$ y viceversa

(20) $A . \vee . B \vee C \models A \vee B . \vee . C$ y viceversa

Sobre la conmutatividad de la conjunción (17) debemos hacer las siguiente observación. La conjunción se toma, en el razonamiento matemático y con frecuencia en el razonamiento filosófico y conversacional, en sentido *ilativo*, es decir, la conjunción "y" sólo indica que las dos proposiciones que ella une son verdaderas. Cuando se toma en este sentido (17) es una condición suficiente de entrañamiento. Pero a veces se toma en sentido subordinativo y en este caso no es conmutativa. Por ej. no es lo mismo decir: "Pedro se quitó la chaqueta y se tiró al agua", que "Pedro se tiró al agua y se quitó la chaqueta". Teniendo en cuenta esta variación de significado no hay mayor dificultad[12].

7. UN PROBLEMA FUNDAMENTAL

Más problemático es el caso de la adición (introducción de la disyunción) y del silogismo disyuntivo. Desde el punto de vista intuitivo parece, a primera vista, que:

(21) $A \models A \vee B$ (y también $A \models B \vee A$)

(22) $\sim A . \wedge . A \vee B \models B$

Pero si se utilizan las dos condiciones en un sistema formal resulta que de dos proposiciones contradictorias se puede deducir cualquier proposición. Para evitar esta consecuencia, la mayor parte de los sistemas de lógica relevante desechan el silogismo disyuntivo. Algunos autores desechan la adición porque consideran que no puede hablarse de entrañamiento si la consecuencia tiene variables que no tienen las premisas[13]. Pero este criterio tiene el defecto de eliminar drásticamente la posibilidad de deducir $A \vee B$ de A. Y hay casos en que esta posibilidad deductiva es tan evidente que no se le puede desechar de manera total.

Nos parece que el origen de esta sorprendente situación reside en la relación entre la formalización y la intuición que se trata de expresar. Se trata de una situación análoga, aunque no igual, a lo que sucede con la implicación. La implicación es demasiado amplia puesto que solo expresa para corresponder a la deducción una condición necesaria de logicidad. La adición es también demasiado amplia, pero no porque exprese una condición necesaria, puesto que en los casos en que se puede aplicar es a todas luces suficiente. Supongamos que tratando de encontrar la solución de un problema, se hace la hipótesis que el problema queda resuelto si $A \vee B$. Y luego se demuestra A de alguna manera considerada válida. Es entonces inevitable considerar que $A \vee B$ ha quedado demostrada y que, en consecuencia, el problema ha sido resuelto.

Pero es también evidente que la adición no puede aplicarse en todos los casos como sucede con la mayoría de las reglas lógicas. El hecho de haber demostrado A, no despierta ningún interés en demostrar $A \vee B$, salvo que haya razones determinadas, que B tenga alguna relación con A o con algún sistema previo de proposiciones en relación a las cuales se está haciendo la investigación. Es una situación muy diferente de la que existe en relación a otras reglas. Por ejemplo, si se ha demostrado $A \models B$ y $B \models C$, entonces ipso facto queda demostrado $A \models C$. El paso de las premisas a la conclusión es natural, espontáneo. Pero quien ha demostrado A no tiene ninguna razón para demostrar $A \vee B$ puesto que B puede ser cualquier proposición. Razonar de esta manera es razonar sin piés ni cabeza.

Desde el punto de vista de la formalización lo que ha sucedido con la adición es que, cuando se formaliza alguna regla, se tiene la tendencia a presentarla de una manera universal. Pero parece que esta generalización no es adecuada. El origen de esta generalización *en forma precipitada* reside en que, cuando se formaliza, es inevitable expresar simbólicamente las notas esenciales del concepto analizado. Pero los conceptos lógicos y matemáticos son tan ricos y profundos que no es posible saber cuales son verdaderamente las notas esenciales. En unos casos se dejan de expresar notas que solo más adelante, conforme se combinan los símbolos y se efectúan las derivaciones, se revelan como esenciales. En otros casos ni siquiera se percibe que existen más notas esenciales que las formalizadas. Y también puede suceder que notas consideradas esenciales no lo sean. En este caso la inesencialidad de la nota se manifiesta porque, conforme se procede a las combinaciones simbólicas, se llega a resultados extraños. Esta parece ser la situación en relación a la adición. De manera general puede pensarse que el exceso de universalidad de las reglas de la adición y las dificultades que presenta el uso de la implicación, se deben al hecho, cada día más obvio, de que la lógica no puede considerarse de manera extensional. El enfoque extensional conduce a la formulación de condiciones de logicidad que sólo son necesarias, o a considerar como suficientes reglas que no pueden aplicarse en todos los casos.

En cuanto a (22) (silogismo disyuntivo), pueden hacerse, mutatis mutandis, las mismas consideraciones que en el caso de la adición.

8. CONDICIONES SUFICIENTES DE LOGICIDAD EN EL NIVEL CUANTIFICACIONAL.

Debido a la complejidad del análisis lógico en el nivel cuantificacional, solo pergeñamos las principales conclusiones a que hemos llegado. Entrar en detalles sería demasiado largo. En el nivel cuantificacional hay dos tipos principales de condiciones de logicidad, principios de igualdad y principios de cuantificación propiamente dichos. Un principio de igualdad es el siguiente:

(1) $\forall x \forall y \; [x = y \,.\, \wedge \,.\, F(x) : \models : F(y)]$

Esto significa que basta que $x = y$ (sea cual sea el tipo de objeto designado por las variables "x", "y") y que $F(x)$ sea verdadero, para que pueda deducirse que $F(y)$ también es verdadero[14].

La manera más general de expresar esta condición de suficiencia es:

$$\forall x_1 \ldots\ldots \forall x_n \; \forall y_1 \ldots\ldots \forall y_n \, [x_1 = y_1 \,.\, \wedge \ldots\ldots \wedge x_n = y_n \wedge :$$
$$F(x_1 \ldots\ldots x_n) \models F(y_1 \ldots\ldots y_n)$$

En cuanto a la cuantificación hay varias maneras de expresar las condiciones suficientes de logicidad, pero algunas se alejan algo de las intuiciones racionales básicas, de manera que conviene desecharlas. Proponemos las siguientes:

(1) $\forall x \, F(x) \models F(\beta)$

(2) $F(\beta) \models (\exists x) \, F(x)$

(3) $$\frac{C \models F(\beta)}{C \models \forall x \, F(x)}$$

en que C no tiene β, y en que se supone que el entrañamiento se funda en alguna de las condiciones suficientes conocidas.

Creemos, aunque no nos parece que se pueda demostrar fácilmente, que estas condiciones suficientes de logicidad cuantificacional son las fundamentales y que todas las demás se pueden derivar de ellas, tomando en consideración las condiciones necesarias. Además, salvo las inferencias puramente coligativas, la mayor parte de las deducciones matemáticas y, en general, cualquier tipo de deducción, se fundan en el empleo repetitivo de éstas reglas. Partiendo de ellas y reflexionando sobre su significado y sobre las propiedades que, necesariamente, debe tener todo entrañamiento, se pueden derivar los axiomas y las reglas consideradas usualmente como originarias. Por ejemplo:

(4) $\forall x\, [\, F(x) \vDash G(x)] \;.\vDash.\; \forall x\, F(x) \vDash \forall x\, G(x)$

Es evidente que si, para todo x, F(x) entraña G(x), entonces, si F(x) es verdadero para todo x, G(x) también tendrá que serlo.

Hay reglas clásicas que deben ser evitadas porque no corresponden a ninguna intuición y son puramente pragmáticas. Por ejemplo, la regla que de A se puede deducir ∀xA en caso de que A no tenga "x". Esto no tiene sentido propiamente lógico, aunque permite simplificar muchas demostraciones (pero todas ellas pueden hacerse sin utilizar la regla). Que ∀xF(c) pueda deducirse de F(c) no corresponde a ninguna intuición lógica.

9. EL CONCEPTO DE CONSECUENCIA LOGICA Y EL PROBLEMA DE LA INTUICION INTELECTUAL

Los análisis efectuados nos permiten llegar a algunas conclusiones importantes. La primera de todas es que el estudio de la relevancia y de las condiciones suficientes de logicidad remite inexorablemente al problema básico de la evidencia y de la intuición intelectual. La creencia de que la formalización de la lógica permite prescindir de una fundamentación intuitiva está tan generalizada que ha impedido, durante muchos años, darse cuenta de la fuente de las paradojas de la implicación y de los desajustes teóricos de la disciplina, especialmente de los límites de las definiciones clásicas de la consecuencia lógica (Tarski). Incluso aquellos mismos que están tratando de reestructurar la lógica sobre bases más racionales que las clásicas, parecen no atreverse a abordar el tema. Es revelador el hecho de que en un libro de tanta profundidad, en el sentido lógico-matemático, como el de Anderson y Belnap, ni siquiera se plantee el problema. En todo lo que hacen los autores persiguen una meta clara: desechar las fórmulas y las reglas lógicas que no corresponden a lo que nuestra razón, de manera intuitiva, considera como específicamente lógico. Pero en ningún momento justifican los sistemas simbólicos elegidos porque se fundan en la evidencia de la intuición intelectual.

Si se analizan los conceptos de intuición intelectual que se encuentran a través de la historia de la filosofía, desde Platón a Husserl y Brouwer pasando por los racionalistas de los siglos XVII y XVIII, se descubre fácilmente que lo hecho no pasa de ser elemental. Los criterios clásicos y modernos de evidencia auténtica y de intuición intelectual son demasiado simples y se pueden encontrar contraejemplos con facilidad. El análisis de lo que es realmente la evidencia en el nivel lógico-matemático y de la manera como nuestra intuición puede fundar los conocimientos en dicho nivel, está por hacerse. Piaget y su escuela han realizado investigaciones de alto interés en relación con el tema (son tal vez los únicos) pero han sido hechas dentro de los marcos del intuicionismo y no permiten captar con claridad la relación entre el conocimiento y la intuición intelectual. La relación entre la índole intensional de la lógica y su enfoque extensional clásico, no ha sido aclarada. Y menos aún la manera como alcanzamos la intuición de los conjuntos infinitos.

Puede aducirse que estamos proponiendo una *teoría* de la evidencia y de la intuición intelectual y que una teoría de este tipo presupone ciertas evidencias e intuiciones básicas. Pero no creemos que ello conduzca a un círculo vicioso. Por otra parte, son cosas como éstas, entre muchas más, las que deben ser aclaradas.

Otra consecuencia es que, hasta el momento, no se tiene una idea clara de la función que cumplen las técnicas de formalización. Tradicionalmente se ha pensado que su función principal es lograr el máximo rigor en el estudio de los temas que nos interesan. Pero al lado de esta función, cuando se trata de lógica por lo menos (y en parte de matemáticas, aunque no de la misma manera), la formalización persigue, además, expresar las notas esenciales de los conceptos. Carnap y, en general, los que han contribuído a desarrollar la moderna semántica lógica han sentido repugnancia, debido a su orientación empirista-pragmatista, a hablar de notas esenciales. Es usual considerar que la formalización corresponde a conceptos que deben ser *similares* a los conceptos formalizados, que debe ser fructífera, exacta y lo más simple posible. Pero todo esto es muy vago. Carnap mismo reconoce que a veces puede apartarse considerablemente de las intuiciones que sirven de punto de partida[15]. En relación a la ciencia empírica lo dicho puede tener sentido, pero no lo tiene en relación a la lógica. Así, cuando se formalizan intuiciones básicas, ¿qué significa que el sistema obtenido sea *similar* a lo captado por la intuición y, además, fructífero? Si no se busca una correspondencia exacta, por lo menos en relación a ciertas notas, el sistema formal no significa nada pues puede ser, entonces, arbitrario. Y en cuanto a ser fructífero, lo puede ser tanto que conduzca a resultados contrarios a la intuición. Pero entonces la única manera de justificar la lógica formal es desde el punto de vista del pragmatismo. Y es fácil mostrar lo insostenible de esta posición utilizando contraejemplos muy simples como el hecho de que algunos de los principios que niegan o eliminan ciertas lógicas nuevas como la intuicionista, son los más útiles para la acción (p. e. el principio del tertium).

Cuando se trata de lógica, la formalización no solo persigue el rigor sino, sobre todo, la reproducción fiel de las evidencias básicas que permiten justificarla. Si se cumple este requisito, la fecundidad y la simplicidad adquieren especial importancia. Pero si se acepta esta función, hay que enfrentarse al problema de la dificultad de encontrar criterios de evidencia auténtica (la propia evolución de las evidencias obliga a plantear el problema) y al problema que presenta el desajuste entre la formalización y la intuición. En una palabra, hay que replantear el tema de la evidencia, de la intuición intelectual, de sus relaciones con el pensamiento racional y sus posibles expresiones formales (exactas). El problema de la estructura y del dinamismo de la razón vuelve, así, a ocupar el lugar central de la filosofía del conocimiento. Es una consecuencia de la evolución de la lógica formal, disciplina que dió la impresión, hasta hace pocas décadas, de que se había liberado para siempre de este tipo de problemas.

NOTAS

[1]Bertrand Russell. The principles of mathematics. pag. 15. Norton and Co. New York, 1948. Introducción a la Filosofía matemática. Especialmente el Cap. XVIII. En Bertrand Russell. Obras escogidas. Aguilar. Madrid, 1956.

[2]En la actualidad se considera que la lógica clásica es aquella que, partiendo de los trabajos de Frege y Peano, adquiere su madurez en Principia Mathematica de Whitehead y Russell y su perfección en los Grundlagender Mathematik de Hilbert y Bernays. Todos los sistemas equivalentes, sea cual sea su estructura, son considerados clásicos.

[3]En realidad no hay un sistema de Lewis, sino cinco, que se relacionan entre sí de manera muy especial y profunda. En todos ellos se pueden demostrar las paradojas.

[4]Se supone que el lector tiene conocimientos elementales de semántica lógica y que conoce el concepto de modelo. En caso de que no estuviera informado, la anterior definición se puede reformular de la siguiente manera (dejando de lado el rigor y pensando solo en la pedagogía): una proposición es consecuencia lógica de otras proposiciones, si en el caso de que estas sean verdaderas, la primera es también verdadera. Debido al rigor que persigue Tarski, relativiza su definición al caso de lenguaje formales que utilizan fórmulas que deben ser interpretadas.

[5]Wilhelm Ackermann. Begründung einer strengen Implikation. Journal of Symbolic Logic, 1956. No hemos podido conseguir el original. El dato está consignado en el libro de Anderson y Belnap: Entailment, the logic of relevance and necessity. Princeton. 1975. La denominación de Ackermann es desafortunada porque su sistema tiene el mismo nombre que el de Lewis: implicación estricta. Pero la intención del autor y el logro conseguido son claros.

[6]Utilizamos "entrañamiento" para traducir "entailment" que es la inversa de la relación de consecuencia lógica. Así, si B es consecuencia lógica de A (es decir si B es deducible de A), entonces A entraña B. Algunos autores proponen "educación" en lugar de "entrañamiento". Pero la partículoa "e" ("ex") indica cualquier tipo de separación. Etimológicamente, entre sus muchas acepciones, "educir" significa engendrar. Hay alguna relación con "entailment", pero no hay verdadera correspondencia. Nos parece que "entrañar" es una traducción más adecuada.

[7]En el citado libro de Anderson y Belnap están la mayoría de los sistemas importantes. Un sistema interesante que no está en dicho libro porque ha sido escrito después de su publicación es el de Routley, llamado "ultralógica", de la Universidad Nacional de Australia, que aún no ha sido publicado.

[8]La alethicidad es una condición necesaria conocida por la lógica clásica, tal como es concebida por los griegos y luego por la tradición medioeval y moderna. Pero en los últimos tiempos se ha descubierto que existen relaciones de entrañamiento entre expresiones que no son proposiciones como las normas, los imperativos, los valores, las preguntas, etc. Esto prueba que la alethicidad no es sino una manifestación específica de un género más amplio que puede concebirse como una relación de homogeneidad entre las premisas y la conclusión. Esta homogeneidad está referida a la propiedad de las expresiones que interesa mantener en la deducción. Por ejemplo, si se trata de entrañamiento de normas, ello quiere decir que si las premisas son normas vigentes, la conclusión tiene

también que ser una norma vigente, o que si las premisas son valores positivos, la conclusión tiene también que ser un valor positivo, etc. Se trata de una condición necesaria que aun no ha sido explorada pues apenas comienza a comprenderse en qué consiste el entrañamiento proposicional.

[9]Cuando se analiza la estructura algebraica correspondiente a la relación de consecuencia lógica, en el nivel coligativo, resulta un tipo especial de rejilla llamado lattice intensional, en el que juega un papel preponderante el concepto algebraico de filtro. El sistema que corresponde a la lógica clásica es un lattice booleano. Sobre estos conceptos ver Anderson and Belnap, págs. 180 y siguientes, Op. Cit.

[10]Este hecho es el fundamento del importante metateorema de la deducción.

[11]El hecho de que para formalizar las relaciones de consecuencia lógica (o entrañamiento) se haya comenzado utilizando la implicación material se debe a una serie de razones; tanto teóricas como históricas. Históricamente los griegos y los medioevales utilizan la implicación material y la distinguen de la estricta. Algunos, como Filón de Megara identificaron la consecuencia lógica con la implicación material, otros como Diodoros Cronos, la identificaron con la implicación estricta (sobre el concepto de implicación en la lógica griega ver Bochenski North Holland, Amsterdam, 1951). Lo mismo sucede en la lógica medioeval. Modernamente la utilización de la implicación material para representar la relación de consecuencia lógica tiene dos fuentes: de un lado el álgebra de la lógica de Schröder y del otro el Begriffschrift de Frege. Partiendo del álgebra de las clases se puede pasar a la lógica de las proposiciones considerando únicamente dos clases: la universal y la nula. En este caso resulta que la inclusión de clases se transforma en la implicación proposicional, de manera que las condiciones de verdad de la inclusión de clases se transforman en las condiciones de verdad de la implicación y por eso una implicación resulta verdadera si su antecedente es falso o si su consecuente es verdadero (la clase nula está incluída en todas las clases, la clase universal incluye todas las clases). En cuanto a Frege, concibe los mismos criterios de verdad para la implicación, porque concibe la verdad y la falsedad como la extensión de las proposiciones de manera que las condiciones de verdad de una proposición (implicación) coinciden con las de inclusión de clase.

Estas circunstancias, con el hecho fundamental de la coincidencia de ciertas propiedades de la implicación (material y estricta) con las condiciones necesarias de logicidad producen una gran confusión y contribuyen a crear el desajuste entre el desarrollo formal de la lógica y su fundamento intuitivo.

[12]Cuando las proposiciones "Pedro se quitó la chaqueta y se tiró al agua" y "Pedro se tiró al agua y se quitó la chaqueta" se traducen mediante la conjunción clásica, resultan las proposiciones conjuntivas que dan la impresión más bien vaga, de ser conmutativas.

[13]Los sistemas lógicos que cumplen esta condición se denominan "tautópicos". Sobre este punto ver Makinson, Topics in modern logic. Methuem and Co. London, 1973.

[14]Esta condición puede no ser plenamente fundada si la igualdad de los términos se establece de manera extensional. Pero se trata de un problema que aún no hemos analizado.

[15]Sobre este tema es conveniente revisar las ideas de Carnap sobre los conceptos de *explicandum* y *explicatum* en su *Logical Foundations of Probability* (University of Chicago Press, 1950).